研究简讯

纲函数，度量和 Hausdorff 测度的关系*

文胜友[1,2] 文志英[3]

1. 武汉大学基础与应用数学基地，武汉 430072；2. 湖北大学数学系 武汉 430062；3. 清华大学数学系，北京 100084

摘要 讨论加倍条件，Hausdorff 测度的等价性及度量的等价性之间的关系．证明了$\mathcal{H}^{\rho,g_1}$与$\mathcal{H}^{\rho,g_2}$对所有紧度量空间（X，ρ）等价，当且仅当纲函数 g_1 与 g_2 等价；对于给定的 $c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$，证明了$\mathcal{H}^{\rho,g}$和$\mathcal{H}^{c\rho,g}$对所有紧度量空间($X$，$\rho$)等价，当且仅当纲函数 g 满足加倍条件．其中$\mathcal{H}^{\rho,g}$是 X 上关于度量 ρ 与纲函数 g 的 Hausdorff 测度．

关键词 Hausdorff 测度 度量 纲函数 加倍条件

设 X 是非空集．称 X 上的两个度量 ρ_1 与 ρ_2 是等价的，如果存在常数 $0<c_1$，$c_2<\infty$ 使得对任意 x，$y\in X$，$c_1\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant c_2\rho_1(x,y)$．

称 X 上的两个测度 μ_1 与 μ_2 是等价的，如果存在常数 $0<c_1$，$c_2<\infty$ 使得对任意 $K\subset X$，$c_1\mu_1(K)\leqslant\mu_2(K)\leqslant c_2\mu_1(K)$．

称函数 g：$[0,\infty)\to[0,\infty)$为一个纲函数，如果它在$[0,\infty)$上是递增，右连续的，当 $t>0$ 时 $g(t)>0$，且 $g(0)=0$．称两个纲函数 g_1 与 g_2 等价，如果存在常数 $0<c_1$，$c_2<\infty$ 及 $\delta>0$，使得对任意 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 有，$c_1g_1(t)\leqslant g_2(t)\leqslant c_2g_1(t)$．

称纲函数 g 满足加倍条件，如果存在常数 $0<c<\infty$ 及 $\delta>0$ 使得对任意 $0\leqslant t\leqslant\delta$，$g(2t)\leqslant cg(t)$．

由上面定义易见，一个纲函数 g 满足加倍条件，当且仅当 $g(t)$与 $g(2t)$等价．

设(X，ρ)为度量空间，g 为纲函数，$K\subset X$．X 的可数子集族$\{U_i\}$称为 K 关于度量 ρ 的一个δ-覆盖，如果 $K\subset\bigcup_i U_i$，且对任意 i，$0<|U_i|_\rho\leqslant\delta$，其中 $|U_i|_\rho$ 表示 U_i 的直径（即 $|U_i|_\rho=\sup\{\rho(x,y);x,y\in U_i\}$）．令

$$\mathcal{H}_\delta^{\rho,g}(K)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}g(|U_i|_\rho),$$

这里下确界遍取所有 K 关于度量 ρ 的 δ-覆盖．定义 K 关于度量 ρ 及纲函数 g 的 Hausdorff 测度为

$$\mathcal{H}^{\rho,g}(K)=\lim_{\delta\to0}\mathcal{H}_\delta^{\rho,g}(K).$$

容易验证按上述方式定义的测度是 X 上的 Borel 正则的度量测度．

这里研究纲函数，Hausdorff 测度与度量之间的关系，它们是分形几何与几何测度论的研究中的很基本的问题，主要的相关文献见参考文献[1～6]．

对任意纲函数 g，定义

$$g_*(x)=\liminf_{t\to0}\frac{g(tx)}{g(t)},$$

$$g^*(x)=\limsup_{t\to0}\frac{g(tx)}{g(t)},\ x\geqslant0.$$

给定纲函数 g，下面的引理给出了加倍条件借助于 g^* 和 g_* 的几个等价描述．

引理 1 设 g 是一个纲函数，则下面的陈述等价：

(1) g 满足加倍条件；

(2) 对某一 $x\in(0,1)$，$g_*(x)>0$；

(3) 对任意 $x>0$，$g_*(x)>0$；

(4) 对某一 $x>1$，$g^*(x)<\infty$；

(5) 对任意 $x>0$，$g^*(x)<\infty$．

2002-08-20 收稿，2002-10-28 收修改稿

* 国家重点基础研究发展规划资助项目(G2000077307)

E-mail：wenzy@tsinghua.edu.cn

证明　根据加倍条件与 g_* 的定义易见，g 满足加倍条件，当且仅当 $g_*\left(\frac{1}{2}\right)>0$．因此我们有(1)⇒(2)及(3)⇒(1)．此外容易验证，如果乘积 $g_*(x)g^*\left(\frac{1}{x}\right)$ 不是 0 乘∞，则有 $g_*(x)g^*\left(\frac{1}{x}\right)=1$．故有(2)⇔(4)及(3)⇔(5)．为证引理，只须证明(2)⇒(3)即可．设 $a\in(0,1)$满足$g_*(a)>0$．则当 t 充分小时有$g(at)>\frac{1}{2}g_*(a)g(t)$．对任意 $x>0$，选取正整数 m，使得 $x\geqslant a^m$，则当 t 充分小时有$g(xt)\geqslant g(a^m t)\geqslant\left(\frac{1}{2}g_*(a)\right)^m g(t)$．由此即得 $g_*(x)\geqslant\left(\frac{1}{2}g_*(a)\right)^m>0$．

下面的定理给出了在相同的度量下，Hausdorff 测度的等价性与纲函数的等价性之间的关系．

定理 1　设 g，h 是两个纲函数，则$\mathcal{H}^{\rho,g}$与$\mathcal{H}^{\rho,h}$对所有的紧度量空间等价，当且仅当 g 与 h 等价．

证明　条件的充分性是明显的，下证必要性．

设 $\frac{1}{2}<\lambda<1$，$a_n=\lambda^{2^{-n}}(n\in\mathbb{N})$，则对任意 $n\geqslant 1$ 有 $a_1a_2...a_n>\lambda$．如果 g 与 h 不等价，根据定义，存在一个序列 $\{\delta_n\downarrow 0\}_{n\geqslant 0}$使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(\delta_n)}{g(\delta_n)}=0$ 或 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(\delta_n)}{g(\delta_n)}=+\infty$．我们只讨论 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(\delta_n)}{g(\delta_n)}=0$ 时的情形，$\lim_{n\to\infty}\frac{h(\delta_n)}{g(\delta_n)}=+\infty$ 时的情形可同样处理．由于 $g(0)=0$ 且 g 右连续，故 $\lim_{n\to\infty}g(\delta_n)=0$．从而可进一步假设序列 $\{\delta_n\}$ 满足 $g(\delta_n)\leqslant(1-a_n)g(\delta_{n-1})$，$n\in\mathbb{N}$．

为完成定理必要性的证明，只需构造一个紧度量空间(X,ρ)使得

$$0<\mathcal{H}^{\rho,g}(X)<\infty\quad 且\,\mathcal{H}^{\rho,h}(X)=0.$$

为此，取 $k_n=\left[\frac{g(\delta_{n-1})}{g(\delta_n)}\right]$，$n\in\mathbb{N}$，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分，则

$$k_n\geqslant\left[\frac{1}{1-a_n}\right]\geqslant 2,\quad k_1k_2...k_n\leqslant\frac{g(\delta_0)}{g(\delta_n)},\tag{1}$$

及

$$\begin{aligned}k_1k_2\cdots k_n&\geqslant\left(\frac{g(\delta_0)}{g(\delta_1)}-1\right)\left(\frac{g(\delta_1)}{g(\delta_2)}-1\right)\cdots\left(\frac{g(\delta_{n-1})}{g(\delta_n)}-1\right)\\&\geqslant\frac{a_1a_2\cdots a_n g(\delta_0)}{g(\delta_n)}\geqslant\frac{\lambda g(\delta_0)}{g(\delta_n)}.\end{aligned}\tag{2}$$

令 $F_0=[0,1]$，按以下步骤构造区间 $[0,1]$ 的一个紧子集 X：取单位区间 $[0,1]$ 的任意 k_1个互不相交且具有正长度的闭子区间．用 F_1表示这 k_1个区间的并集．对于 F_1的每一个元 I，取 I 的任意k_2个互不相交且具有正长度的闭子区间，由此得到$[0,1]$ 的 k_1k_2个互不相交的闭子区间，用 F_2 表示这 k_1k_2个区间的并集．继续上面的步骤，可得到一个序列 $F_0\supset F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\cdots$．令

$$X=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n.$$

根据上面的构造，X 是$[0,1]$的非空紧子集．称 F_n 的每一个元为一个 n 级基本区间．用 d_n 表示所有 n 级基本区间的最大长度，构造中可以要求 $\lim_{n\to\infty}d_n=0$．

设 x，$y\in X$，$x\neq y$．设 $n(x,y)$ 是同时包含 x 与 y 的基本区间的最高级数．即存在一个 $n(x,y)$级基本区间 I 包含x 与y，但任何更高级的基本区间不能同时包含 x，y．现在我们在 X 上定义另一个度量ρ 如下：

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & 若\quad x=y,\\ \delta_{n(x,y)} & 若\quad x\neq y.\end{cases}$$

容易看出，在这个度量下，X 是紧的和全不连通的．

下面估计(X,ρ) 关于纲函数 g 的 Hausdorff 测度．设 $n\geqslant 1$，I 是一个 n 级基本区间．由度量 ρ 的定义易见，对任意 x，$y\in I$ 有$n(x,y)\geqslant n$，其中等号对某些 x，$y\in I$ 成立，故有$|I|_\rho=\delta_n$．因此，由所有 n 级基本区间构成的区间族是X 关于ρ 的一个δ_n-覆盖．于是，由(1)式得

$$\mathcal{H}^{\rho,g}_{\delta_n}(X)\leqslant k_1k_2\cdots k_n g(\delta_n)\leqslant g(\delta_0),$$

从而

$$\mathcal{H}^{\rho,g}(X)\leqslant g(\delta_0).\tag{3}$$

设 μ 是X 上满足$\mu(I_n)=\frac{1}{k_1k_2\cdots k_n}$的惟一 Borel 概率测度，这里 $n\geqslant 1$，I_n是任一 n 级基本区间．设 U 是X 的一个子集，满足 $0<|U|_\rho<\delta_0$．取 n 为满足$\delta_n\leqslant|U|_\rho<\delta_{n-1}$的正整数．由度量 ρ 的定义，$|U|_\rho=\delta_n$．因此存在一个 n 级基本区间 I_n使得$U\subset I_n$．故由(2)式得

$$\mu(U) \leqslant \mu(I_n) = \frac{1}{k_1 k_2 \cdots k_n} \leqslant \frac{g(|U|_\rho)}{\lambda g(\delta_0)},$$

由 Frostman 引理即得 $\lambda g(\delta_0) \leqslant \mathcal{H}^{\rho,g}(X)$. 结合(3)式得到

$$0 < \lambda g(\delta_0) \leqslant \mathcal{H}^{\rho,g}(X) \leqslant g(\delta_0) < \infty. \quad (4)$$

对于纲函数 h，亦有

$$\mathcal{H}^h_{\delta_n}(X) \leqslant k_1 k_2 \cdots k_n h(\delta_n) \leqslant g(\delta_0)\frac{h(\delta_n)}{g(\delta_n)}.$$

根据假设，$h(\delta_n)/g(\delta_n) \to 0$，因此 $\mathcal{H}^{\rho,h}(X)=0$. 与(4)式比较可见，$\mathcal{H}^{\rho,g}(X)$ 和 $\mathcal{H}^{\rho,h}(X)$ 不等价. 定理证毕.

对于同一纲函数，下面定理给出了加倍条件与 Hausdorff 测度的等价性之间的关系.

定理 2 设 g 是一个纲函数，$c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$，则下述条件等价.

(1) g 满足加倍条件;

(2) 对任意紧度量空间(X, ρ)，$\mathcal{H}^{\rho,g}$ 与 $\mathcal{H}^{c\rho,g}$ 等价.

证明 (1)⇒(2). 事实上我们将证明下面更一般的结论：如果 g 是一个满足加倍条件的纲函数，则对任意两个等价的度量 ρ_1，ρ_2，测度 $\mathcal{H}^{\rho_1,g}$ 与 $\mathcal{H}^{\rho_2,g}$ 等价.

设 $0<c_1$，$c_2<\infty$ 是两个常数使得

$$c_1\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y) \leqslant c_2\rho_1(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

因为 g 满足加倍条件，故由引理 1，$g_*(c_1)$ 和 $g^*(c_2)$ 都是正有限的. 因此只须证明对任意 $K \subset X$，

$$g_*(c_1)\mathcal{H}^{\rho_1,g}(K) \leqslant \mathcal{H}^{\rho_2,g}(K) \leqslant g^*(c_2)\mathcal{H}^{\rho_1,g}(K).$$

设 $K \subset X$，$\delta>0$. 如果$\{U_i\}$是 K 关于 ρ_1 的一个 δ-覆盖，则$\{U_i\}$是 K 关于 ρ_2 的一个 $c_2\delta$-覆盖. 因为

$$\sum g(|U_i|_{\rho_2}) \leqslant \sum g(c_2|U_i|_{\rho_1}) \leqslant \sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{g(c_2t)}{g(t)}\sum g(|U_i|_{\rho_1}),$$

有

$$\mathcal{H}^{\rho_2,g}_{c_2\delta}(K) \leqslant \sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{g(c_2t)}{g(t)}\mathcal{H}^{\rho_1,g}_{\delta}(K),$$

由此即得

$$\mathcal{H}^{\rho,g}(K) \leqslant g^*(c_2)\mathcal{H}^{\rho_1,g}(K). \quad (5)$$

同样的讨论可得$\mathcal{H}^{\rho_1,g}(K) \leqslant g^*\left(\frac{1}{c_1}\right)\mathcal{H}^{\rho_2,g}(K)$. 因 $g_*(c_1)g^*\left(\frac{1}{c_1}\right)=1$，故

$$g_*(c_1)\mathcal{H}^{\rho_1,g}(K) \leqslant \mathcal{H}^{\rho_2,g}(K). \quad (6)$$

由(5)和(6)式知，$\mathcal{H}^{\rho_1,g}$和$\mathcal{H}^{\rho_2,g}$等价.

(2)⇒(1)：利用 Hausdorff 测度的定义容易验证，$\mathcal{H}^{c\rho,g}=\mathcal{H}^{\rho,g(c^*)}$. 故由定理 1，$g(t)$ 与 $g(ct)$ 是等价的. 据此，由引理 1 即知 g 满足加倍条件.

下面的命题指出了当 g 不满足加倍条件时的一种极端情形.

命题 1 设 $0<c<1$，g 是纲函数，(X, ρ) 是度量空间. 设

(i) $\lim_{t\to 0}\frac{g(ct)}{g(t)}=0$;

(ii) $0<\mathcal{H}^{\rho,g}(X)<\infty$.

则

$$\mathcal{H}^{c\rho,g}(X)=0,\ \mathcal{H}^{\frac{1}{c}\rho,g}(X)=\infty.$$

证明 首先证明满足命题要求的纲函数 g 及度量空间(X, ρ)存在. 取

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \text{若} \quad t=0, \\ 2^{-n-1} & \text{若} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant t < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

容易验证，对任意 $0<c<1$ 有，$\lim_{t\to 0}\frac{g(ct)}{g(t)}=0$. 从而由 Dvoretzky 定理（见文献[5]，定理 36)，存在一个度量空间(X, ρ)使得 $0<\mathcal{H}^{\rho,g}(X)<\infty$.

注意到对任意 $\delta>0$，$\{U_i\}_{i=1}^\infty$是 X 关于 ρ 的一个 δ-覆盖当且仅当 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$是 X 关于 $c\rho$ 的一个$c\delta$-覆盖，故由

$$\sum_{i=1}^\infty g(|U_i|_{c\rho}) = \sum_{i=1}^\infty \frac{g(c|U_i|_\rho)}{g(|U_i|_\rho)}g(|U_i|_\rho) \leqslant \sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{g(ct)}{g(t)}\sum_{i=1}^\infty g(|U_i|_\rho)$$

得

$$\mathcal{H}_{c\delta}^{c\rho,g}(X) \leqslant \sup_{0<t\leqslant\delta} \frac{g(ct)}{g(t)} \mathcal{H}_{\delta}^{\rho,g}(X).$$

由条件(ii)知 $\mathcal{H}^{\rho,g}(X)$ 是正有限的，又由条件(i)知$\lim_{t\to 0}\frac{g(ct)}{g(t)}=0$. 令 $\delta\to 0$ 即得$\mathcal{H}^{c\rho,g}(X)=0$.

类似地，注意对任意 $\delta>0$, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$是 X 关于 ρ 的一个 $c\delta$-覆盖当且仅当 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$是 X 关于 $\frac{1}{c}\rho$ 的一个 δ-覆盖，由

$$\sum_{i=1}^{\infty} g\left(|U_i|_{\frac{1}{c}\rho}\right) \geqslant \inf_{0<t\leqslant\delta} \frac{g(t)}{g(ct)} \sum_{i=1}^{\infty} g(|U_i|_{\rho})$$

得

$$\mathcal{H}_{\delta}^{\frac{1}{c}\rho,g}(X) \geqslant \inf_{0<t\leqslant\delta} \frac{g(t)}{g(ct)} \mathcal{H}_{c\delta}^{\rho,g}(X).$$

令 $\delta\to 0$, 即得 $\mathcal{H}^{\frac{1}{c}\rho,g}(X)=+\infty$. 证毕.

给定一个度量空间 (X,ρ) 及一个纲函数 g, 视$\mathcal{H}^{c\rho,g}(X)$ 为变量 $c\in(0,\infty)$ 的函数，则它是递增的. 然而，下面的例子将证明即使纲函数 g 满足加倍条件且 $0<\mathcal{H}^{\rho,g}(X)<\infty$, $\mathcal{H}^{c\rho,g}(X)$ 仍可能不是严格递增的.

设 ρ 是实直线上的 Euclid 度量. 考虑[0, 1]上的迭代函数系统：

$$\phi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3),\ \varphi_1(x)=\frac{x}{5},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{x}{5}+\frac{2}{5},\ \varphi_3(x)=\frac{x}{5}+\frac{4}{5}.$$

设 X 为由 ϕ 生成的自相似集，则 $X=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant 3}\varphi_i(X)$是一个 Cantor 型集. 令 $s=\log_5 3$,

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{若}\quad t=0,\\ 3^{-n} & \text{若}\quad 5^{-n}\leqslant t<5^{-n+1}, n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

下面将证明

$$\mathcal{H}^{\rho,g}(X)=\mathcal{H}^{\frac{1}{2}\rho,g}(X)=\frac{1}{3}. \tag{7}$$

由 g 的定义知g 是加倍纲函数，且对任意 $0\leqslant t<1$, $\frac{1}{3}t^s\leqslant g(t)\leqslant t^s$. 因此 $\frac{1}{3}\leqslant\mathcal{H}^{\rho,g}(X)\leqslant 1$. 为证(7)式，只须证明$\mathcal{H}^{\rho,g}(X)\leqslant\frac{1}{3}$和$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}\rho,g}(X)\geqslant\frac{1}{3}$.

设 n, $j\in\mathbb{N}$. 由 X 的构造看到X 由 3^n 个直径为 5^{-n}的拷贝组成，且每个拷贝可由两个长度分别为 $5^{-n}-5^{-(n+j)}$及 $5^{-(n+j)}$的区间覆盖. 故 X 可由 $2\cdot 3^n$个区间覆盖，其中长度为 $5^{-n}-5^{-(n+j)}$的区间有 3^n个，长度为 $5^{-(n+j)}$的区间有 3^n个. 故有

$$\mathcal{H}_{5^{-n}}^{\rho,g}(X)\leqslant 3^n g(5^{-n}-5^{-(n+j)})+3^n g(5^{-(n+j)})=$$

$$3^n 3^{-(n+1)}+3^n 3^{-(n+j)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^j},$$

由此即得$\mathcal{H}^{\rho,g}(X)\leqslant\frac{1}{3}$.

另一方面，设 μ 是$\frac{1}{2}X\left(:=\left\{\frac{1}{2}x,\ x\in X\right\}\right)$上的 Borel 概率测度，使得对 $\frac{1}{2}X$ 的任意 n 级拷贝 I_n 及任意$n\in\mathbb{N}$有 $\mu(I_n)=3^{-n}$. 设 I 是一个区间，$0<|I|<1$. 取 $n\in\mathbb{N}$ 为满足条件 $5^{-n}\leqslant|I|<5^{-n+1}$的整数，取一个长为 5^{-n+1}的区间 $\tilde{I}(\subseteq[0,1])$使得 $I\subseteq\tilde{I}$. 由 $\frac{1}{2}X$ 的构造，$\frac{1}{2}X$ 的任意一个$(n-1)$级拷贝的直径为 $5^{-n+1}/2$, 而且任意两个相邻的$(n-1)$级拷贝之间间隔为 $5^{-n+1}/2$. 因此 $\tilde{I}$ 至多与$\frac{1}{2}X$ 的两个$(n-1)$级拷贝相交，且有$\mu(\tilde{I})=3^{-n+1}$. 由此即得 $\mu(I)\leqslant\mu(\tilde{I})=3g(|I|)$. 由 Frostman 引理即得$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}\rho,g}(X)\geqslant\frac{1}{3}$.

参 考 文 献

1 Devoretzky A. A note on Hausdorff dimensional functions. Proc Camb Phil Soc, 1948, 44: 13

2 Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry. Chichester: John Wiley and Sons Inc, 1997

3 Mattila P. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

4 Mauldin R D, et al. Scaling Hausdorff Measures. Mathematika, 1989, 36: 325

5 Rogers C A. Hausdorff Measures. Cambridge: Cambridge University Press, 1970. 1998

6 Csörnyei M, et al. Scaling properties of Hausdorff and packing measures. Math Ann, 2001, 319: 817